3. Równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego

Definicja 1. Równanie różniczkowe postaci
$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=g(x), \qquad (1)$$
gdzie a, b, c, g są danymi funkcjami ciągłymi w pewnym przedziale $X\subset\mathbb{R}$ ponadto $a\neq 0$ na X, nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym rzędu drugiego*. Funkcje $a,\ b,\ c$ nazywamy *współczynnikami*, a funkcję g *wyrazem wolnym* tego równania. Jeżeli $g(x)\equiv 0$ na X, to równanie (1) nazywamy *równaniem liniowym jednorodnym.* W przeciwnym przypadku nazywamy je *równaniem liniowym niejednorodnym.*

Ponieważ $a\neq 0$, to równanie (1) można zapisać w postaci
$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \qquad (2)$$
gdzie
$$p(x)=\frac{b(x)}{a(x)},\quad q(x)=\frac{c(x)}{a(x)},\quad f(x)=\frac{g(x)}{a(x)}.$$
Wtedy równanie liniowe jednorodne ma postać
$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \qquad (3)$$
Rozważmy dla równania (2) warunki początkowe postaci
$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_1.$$
Twierdzenie 1. Jeżeli p, q, f są funkcjami ciągłymi w pewnym przedziale $X\subset\mathbb{R}$, to *zagadnienie Cauchy'ego* dla równania (2), ma dokładnie jedno rozwiązanie, które jest określone na X dla każdego $x_0\in X$, $y_0\in\mathbb{R}$ i $y_1\in\mathbb{R}$.

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są rozwiązaniami równania jednorodnego (3) na przedziale X, to każda funkcja postaci
$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x), \qquad (4)$$
gdzie liczby C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi, również będzie rozwiązaniem równania (3) na X.

Definicja 2. Dwa rozwiązania $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ równania (3), określone na przedziale X, nazywamy *układem fundamentalnym* (*podstawowym*) tego równania, jeżeli dla każdego $x\in X$ spełniony jest warunek

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Wyznacznik $W(x)$ nazywamy *wrońskianem* pary funkcji $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

Zauważmy ponadto, że warunek (5) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym liniowej niezależności pary funkcji $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

Twierdzenie 3. Niech funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są rozwiązaniami równania jednorodnego (3) na przedziale X. Jeżeli istnieje taki punkt $x_0 \in X$, że wyznacznik $W(x_0) \neq 0$, to $W(x) \neq 0$ dla każdego $x \in X$.

Twierdzenie 4. Niech $x_0 \in X$ jest dowolnym ustalonym punktem. Wtedy wrońskian (5) ma postać

$$W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

Twierdzenie 5. Niech para funkcji $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ jest układem fundamentalnym równania (3). Wtedy funkcja postaci (4) opisuje rozwiązanie ogólne równania (3).

Twierdzenie 6. Niech para funkcji $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ jest układem fundamentalnym równania (3) i niech funkcja $\psi(x)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania niejednorodnego (2) określonym na X. Wtedy ogólne rozwiązanie równania (2) ma postać

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \psi(x), \tag{6}$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Podobnie jak w przypadku równania liniowego rzędu pierwszego dla rozwiązania równania liniowego niejednorodnego postaci (2) możemy skorzystać z *metody uzmienniania stałych*. Niech funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ tworzą układ fundamentalny równania jednorodnego (3). *Metoda uzmienniania stałych* opiera się na fakcie, że funkcja postaci

$$y = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x), \tag{7}$$

gdzie $C_1(x)$ i $C_2(x)$ są nieznanymi funkcjami, jest rozwiązaniem równania (2). Inaczej mówiąc, rozwiązanie równania liniowego niejednorodnego (2) szukamy w postaci (7). Różniczkując (7) mamy

$$y' = C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) + C_1(x)\varphi_1'(x) + C_2(x)\varphi_2'(x).$$

Dodatkowo na funkcje $C_1(x)$ i $C_2(x)$ nakładamy następujący warunek

$$C_1'(x)\varphi_1(x)+C_2'(x)\varphi_2(x)=0.$$

Wtedy

$$y'=C_1(x)\varphi_1'(x)+C_2(x)\varphi_2'(x).$$

Zatem druga pochodna ma postać

$$y''=C_1'(x)\varphi_1'(x)+C_2'(x)\varphi_2'(x)y'+C_1(x)\varphi_1''(x)+C_2(x)\varphi_2''(x).$$

Podstawiając y, y' i y'' do równania (2) i uwzględniając to, że funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są rozwiązaniami równania (3), otrzymamy układ równań postaci

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x)+C_2'(x)\varphi_2(x)=0, \\ C_1'(x)\varphi_1'(x)+C_2'(x)\varphi_2'(x)=f(x). \end{cases}$$

Ponieważ wrońskian $W(x)\neq 0$, więc powyższy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie względem $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$. Ponadto stosując wzory Cramera otrzymamy dwa równania różniczkowe rzędu pierwszego postaci

$$C_1'(x)=-\frac{f(x)\varphi_2(x)}{W(x)},$$

$$C_2'(x)=\frac{f(x)\varphi_1(x)}{W(x)}.$$

Całkując obustronnie otrzymamy

$$C_1(x)=-\int\frac{f(x)\varphi_2(x)}{W(x)}dx+\tilde{C}_1,$$

$$C_2(x)=\int\frac{f(x)\varphi_1(x)}{W(x)}dx+\tilde{C}_2,$$

gdzie $\tilde{C}_1$ i $\tilde{C}_2$ są dowolnymi stałymi całkowania.

Zatem podstawiając $C_1(x)$ i $C_2(x)$ do wzoru (7) mamy rozwiązanie równania (2) postaci

$$y=\tilde{C}_1\varphi_1(x)+\tilde{C}_2\varphi_2(x)+\psi(x), \tag{8}$$

gdzie

$$\psi(x)=-\varphi_1(x)\int\frac{f(x)\varphi_2(x)}{W(x)}dx+\varphi_2(x)\int\frac{f(x)\varphi_1(x)}{W(x)}dx. \tag{9}$$

Ponieważ suma pierwszych dwóch składników w (8) jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego (3), a funkcja $\psi(x)$ jest rozwiązaniem równania (2), więc funkcja y postaci (8) jest rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego (2).

Przykład 1. Rozwiązać równanie

$$y'' + y = \sin^2 x\,. \tag{10}$$

Rozwiązanie. Podstawiając bezpośrednio łatwo sprawdzić, że funkcje

$$\varphi_1(x) = \sin x, \qquad \varphi_2(x) = \cos x$$

są rozwiązaniami równania jednorodnego

$$y'' + y = 0\,. \tag{11}$$

Ponadto wrońskian (5) dla tych rozwiązań ma postać

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0\,,$$

co oznacza, że funkcje $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ tworzą układ fundamentalny dla równania (11). Zatem rozwiązanie ogólne równania (11) ma postać

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x\,,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi. Wykorzystując metodę uzmienniania stałych szukamy rozwiązania równania niejednorodnego (10) w postaci

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x\,.$$

Ponieważ $f(x) = \sin^2 x$ i $W(x) = -1$, więc mamy równania

$$C_1'(x) = \sin^2 x \cos x, \qquad C_2'(x) = -\sin^3 x\,.$$

Całkując obustronnie powyższe równania otrzymamy

$$C_1(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + \tilde{C}_1,$$

$$C_2(x) = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + \tilde{C}_2\,,$$

gdzie $\tilde{C}_1$ i $\tilde{C}_2$ są dowolnymi stałymi całkowania. Zatem rozwiązanie szczególne $\psi(x)$ równania (10) ma postać

$$\psi(x) = \frac{1}{3}\sin^4 x + \cos x\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right).$$

Tak więc rozwiązanie ogólne równania (10) ma postać

$$y=\tilde{C}_1\cos x+\tilde{C}_2\sin x+\frac{1}{3}\sin^4 x-\frac{1}{3}\cos^4 x+\cos^2 x\,.$$

4. Równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego postaci

$$ay''+by'+cy=f(x)\,, \tag{12}$$

gdzie $a,\ b,\ c$ są danymi liczbami rzeczywistymi i $f(x)$ jest funkcją ciągłą w pewnym przedziale $X\subset\mathbb{R}$. Zatem równanie jednorodne ma postać

$$ay''+by'+cy=0\,. \tag{13}$$

Zaznaczmy, że wszystkie rozwiązania równania (13) są określone na $X=\mathbb{R}$.

Rozwiązania równania (13) szukamy w postaci

$$y=\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \tag{14}$$

gdzie λ jest nieznaną liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Obliczając pierwszą i drugą pochodną funkcji (14) mamy

$$y'=\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x},\quad y''=\lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,.$$

Zatem podstawiając do równania (13) otrzymamy

$\mathrm{e}^{\lambda x}(a\lambda^2+b\lambda+c)=0$ .Ponieważ funkcja $\mathrm{e}^{\lambda x}\neq 0$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$, więc funkcja (14) jest rozwiązaniem równania (13) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0\,. \tag{15}$$

Równanie (15) nazywamy *równaniem charakterystycznym* dla równania (13). Równanie charakterystyczne jest równaniem kwadratowym, a więc znając pierwiastki tego równania otrzymamy rozwiązanie równania jednorodnego (13). Wiadomo, że w zależności od rodzaju pierwiastków λ_1 i λ_2 równania kwadratowego mamy trzy przypadki:

Przypadek 1. Wyróżnik $\Delta=b^2-4ac>0$**.** Wtedy mamy dwa różne pierwiastki rzeczywiste

$$\lambda_1\neq\lambda_2\,.$$

Zatem równanie (13) ma dwa różne rozwiązania

$$\varphi_1(x)=\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\quad \varphi_2(x)=\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\,.$$

Ponieważ wrońskian dla powyższych rozwiązań

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0,$$

więc funkcje $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ stanowią układ fundamentalny i rozwiązanie ogólne równania (13) ma postać

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne dla powyższego równania ma postać

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 1.$$

Tak więc rozwiązanie ogólne rozważanego równania ma postać

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}.$$

Przypadek 2. Wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac = 0$**.** Wtedy mamy pierwiastek podwójny

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2.$$

Zatem funkcja

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda x}$$

jest rozwiązaniem równania (13). Łatwo się przekonać, że funkcja

$$\varphi_2(x) = x e^{\lambda x}$$

również będzie rozwiązaniem równania (13). Ponadto wrońskian danych funkcji spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0.$$

To oznacza, że podane funkcje $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ tworzą układ fundamentalny. Zatem rozwiązanie ogólne równania (13) ma postać

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x},$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Przykład 3. Rozwiązać równanie

$$y'' + 2y' + y = 0\,.$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne dla danego równania różniczkowego ma postać

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0\,.$$

Zatem $\Delta = 4 - 4 = 0$ i mamy pierwiastek podwójny $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Tak więc rozwiązanie ogólne rozważanego równania ma postać

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 x \mathrm{e}^{-x}\,.$$

Przypadek 3. Wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac < 0$**.** Wtedy pierwiastki λ_1 i λ_2 są liczbami zespolonymi. Ponadto mamy

$$\lambda_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a},$$

gdzie i jest jedynką urojoną, tzn. $i^2 = -1$. Oznaczmy

$$\alpha = \frac{-b}{2a}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\,.$$

Wtedy otrzymamy

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0\,.$$

Podstawiając λ_1 i λ_2 do wzoru (14) otrzymamy rozwiązania zespolone równania (13) postaci

$$y_1 = \mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = \mathrm{e}^{(\alpha - i\beta)x}\,.$$

Korzystając ze wzoru Eulera

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$$

pierwsze z rozwiązań można zapisać w postaci

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\,.$$

Niech

$$\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad \varphi_2(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,. \tag{16}$$

Twierdzenie 7. Funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ postaci (16) są rozwiązaniami równania (13), ponadto tworzą układ fundamentalny tego równania.
Tak więc rozwiązanie ogólne równania (13) w tym przypadku ma postać

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)\,,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Zauważmy również, że wrońskian funkcji (16) spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x) \end{vmatrix}=\beta e^{2\alpha x}\neq 0\,.$$

Przykład 4. Rozwiązać równanie

$$y''-4y'+29y=0\,.$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne dla danego równania ma postać

$$\lambda^2-4\lambda+29=0\,.$$

Zatem $\Delta=16-4\cdot 29=-100$. Więc $\alpha=2,\ \ \beta=5$ i mamy pierwiastki postaci

$$\lambda_1=2+5i,\quad \lambda_2=2-5i\,.$$

Wobec tego rozwiązanie ogólne naszego równania można zapisać w postaci

$$y=e^{2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)\,,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Dla rozwiązywania równania liniowego niejednorodnego o współczynnikach stałych postaci (12) możemy stosować *metodę uzmienniania stałych,* która została dokładnie opisana dla równania linowego niejednorodnego postaci ogólnej (2).

Przykład 5. Rozwiązać równanie

$$y''-2y'+y=e^x\,. \tag{17}$$

Rozwiązanie. Wyznaczymy najpierw rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$y''-2y'+y=0\,.$$

Równanie charakterystyczne dla powyższego równania ma postać

$$\lambda^2-2\lambda+1=0\,.$$

Mamy pierwiastek podwójny $\lambda_1=\lambda_2=1$. Zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest dane wzorem

$$y=C_1 e^x+C_2 x e^x\,.$$

Ponadto rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego ma postać

$$y=C_1 e^x+C_2 x e^x+\psi(x)\,,$$

gdzie funkcja $\psi(x)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania (17).

Wobec metody uzmienniania stałych, w celu wyznaczenia funkcji $\psi(x)$ możemy skorzystać ze wzoru (9), mianowicie

$$\psi(x) = -\varphi_1(x)\int \frac{f(x)\varphi_2(x)}{W(x)}dx + \varphi_2(x)\int \frac{f(x)\varphi_1(x)}{W(x)}dx.$$

Mamy tu:

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \quad \varphi_1(x) = \mathrm{e}^x, \quad \varphi_2(x) = x\mathrm{e}^x.$$

Wtedy wrońskian ma postać

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2x}.$$

Zatem podstawiając do wzoru (9) otrzymamy

$$\psi(x) = -\mathrm{e}^x \int x dx + x\mathrm{e}^x \int dx = -\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x.$$

Tak więc rozwiązanie ogólne równania (17) dane jest wzorem

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Przykład 6. Rozwiązać równanie

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}. \tag{18}$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne dla powyższego równania ma postać

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Stąd otrzymamy pierwiastki zespolone

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i.$$

To oznacza, że mamy przypadek 3, przy czym $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Tak więc rozwiązanie równania jednorodnego dla równania (18) dane jest wzorem

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Zatem mamy tu

$$\varphi_1(x) = \cos x, \quad \varphi_2(x) = \sin x$$

i prawa strona równania

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

Wyznaczymy wrońskian dla funkcji $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Mamy

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Na podstawie metody uzmienniania stałych rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (18) ma postać (9). Ponieważ

$$\int \frac{f(x)\varphi_2(x)}{W(x)} dx = \int \frac{\sin x}{\sin x} dx = x$$

oraz

$$\int \frac{f(x)\varphi_1(x)}{W(x)} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x|,$$

więc podstawiając obliczone całki do wzoru (9) otrzymamy rozwiązanie równania niejednorodnego (18) postaci

$$\psi(x) = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|.$$

Zatem szukane rozwiązanie ogólne równania (18) dane jest wzorem

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Rozwiązać podane równania różniczkowe liniowe jednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach:

1. $y'' + 7y' + 12y = 0$;
2. $y'' + 6y' + 9y = 0$;
3. $y'' - 4y' + 13y = 0$;
4. $y'' + 2y' - 3y = 0$;
5. $y'' + 3y = 0$;
6. $y'' + y' - 2y = 0$;
7. $2y'' - 5y' + 2y = 0$;
8. $4y'' - 8y' + 5y = 0$;
9. $3y'' - 2y' - 8y = 0$;
10. $y'' - 2y' = 0$;
11. $y'' - 4y' + 5y = 0$;
12. $2y'' - 5y' + 2y = 0$;
13. $4y'' - 4y' + y = 0$;
14. $y'' - 2y' + 10y = 0$;
15. $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Korzystając z metody uzmienniania stałych rozwiązać podane równania liniowe niejednorodne:

16. $y'' + 2y' + y = -2$;

17. $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$;

18. $y'' - 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$;

19. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$;

20. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$;

21. $y'' - y = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$;

22. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}$;

23. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$;

24. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^2 x\sqrt{\sin x\cos x}}$;

25. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$;

26. $y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-x}\left(\cos^2 x + \operatorname{tg} x\right)$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch